

MÁSODFOKÚ EGYENLŐTLENSÉGEK

ELMÉLET

Másodfokú egyenlőtlenség grafikus megoldása

Rendezzük egy oldalra!

- Használjuk a mérlegelvet!
- Ha negatív számmal szorzunk vagy osztunk, meg kell fordítani a relációs jel irányát!

Ábrázoljuk a hozzá tartozó függvényt!

- Mik a zérushelyek? Merre áll a parabola?
- Ha vannak zérushelyek, akkor elég, ha a két zérushelyet bejelöljük, és berajzoljuk, hogy merre áll a parabola.

Olvassuk le a grafikonról a megoldást!

- Figyeljük meg, hogy a grafikon melyik része helyezkedik el az x tengely felett, és melyik része alatta!

FELADATOK

A Krémvarázs cégnél arckrémeket állítanak elő.

Ha a havi termelés x kg arckrém ($x \geq 0$), akkor az árbevétel (euróban) a $b(x) = 30x - 0,02x^2$ képlettel, a költség pedig a $k(x) = 0,1x^2 - 50x + 10\,000$ képlettel írható le. Havi hány kg termék előállítása és értékesítése esetén nyereséges a termelés, és mekkora az elérhető legnagyobb nyereség?

Megoldás

A bevétel és a költség különbsége a nyereség, tehát a nyereséget az $n(x) = b(x) - k(x)$ képlet adja meg.

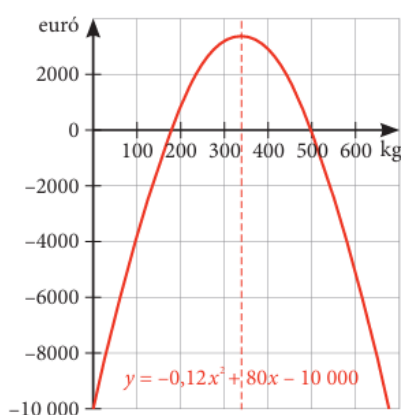
$$n(x) = 30x - 0,02x^2 - (0,1x^2 - 50x + 10\,000) = 30x - 0,02x^2 - 0,1x^2 + 50x - 10\,000 = -0,12x^2 + 80x - 10\,000.$$

A termelés akkor nyereséges, ha $n(x) > 0$.

Meg kell tehát oldani a $-0,12x^2 + 80x - 10\,000 > 0$ **másodfokú egyenlőtlenséget**.

Azt könnyen meg tudjuk mondani, hogy mely esetben egyenlő a bevétel a költséggel, azaz mikor 0 a nyereség, mert ehhez csak a $-0,12x^2 + 80x - 10\,000 = 0$ másodfokú egyenletet kell megoldanunk.

Megoldóképlettel: $x_{1,2} = \frac{-80 \pm \sqrt{80^2 - 4 \cdot (-0,12) \cdot (-10\,000)}}{2 \cdot (-0,12)} = \frac{-80 \pm 40}{-0,24}$; $x_1 = 500$, $x_2 = \frac{500}{3} \approx 167$.



Eredményünk azt jelenti, hogy ≈ 167 kg, illetve 500 kg krém gyártása esetén nulla a nyereség (profit) értéke.

A nyereséget leíró $x \mapsto -0,12x^2 + 80x - 10\,000$ ($x \geq 0$) függvényre nézve ez azt jelenti, hogy két zérushelye van, az $\frac{500}{3}$ (≈ 167) és az 500. Mivel a függvény grafikonja

lefelé nyitott parabola (egy íve), ezért ha $\frac{500}{3} < x < 500$, akkor a függvényértékek pozitívak.

A $-0,12x^2 + 80x - 10\,000 > 0$ másodfokú egyenlőtlenség megoldásai az $\left] \frac{500}{3}; 500 \right[$ intervallum elemei.

A krémgyártás nyereséges, ha a havonta gyártott mennyiség ≈ 167 kg-nál több, de 500 kg-nál kevesebb.

A nyereséget leíró függvénynek tehát $\approx \frac{167 + 500}{2} \approx 333$ -nál van maximuma, és ez a maximum

$$-0,12 \cdot 333^2 + 80 \cdot 333 - 10\,000 \approx 3346 \text{ (euró)}.$$

A krémgyártással elérhető legnagyobb havi nyereség kb. 3346 euró, és ez akkor lehetséges, ha kb. 333 kg-ot termelnek.

2. Oldd meg a következő másodfokú egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $x^2 + 2x < 0$ c) $-x^2 - 3x \leq 0$

b) $x^2 + 2x \geq 0$ d) $-x^2 - 3x > 0$

Megoldás:

2/c) $-x^2 - 3x \leq 0$

1. Mó: $-x(x+3) \leq 0$

2. Mó: $a=-1, b=-3, c=0$
 $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0}}{2 \cdot (-1)} = \frac{3 \pm 3}{-2}$
 $x_1 = 0, x_2 = -3$

① $\Rightarrow$ egy/szorzat akkor és csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla
 ② rajz

$x=0$
 $x_1=0$

$x+3=0$
 $x_2=-3$

$x \leq -3$ vagy $x \geq 0$
 $x \in]-\infty; -3] \cup [0; +\infty[$

2/d) $-x^2 - 3x > 0$

1. Mó: $-x(x+3) > 0$

2. Mó: $a=-1, b=-3, c=0$
 $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0}}{2 \cdot (-1)} = \frac{3 \pm 3}{-2}$
 $x_1 = 0, x_2 = -3$

① $\Rightarrow$ egy/szorzat akkor és csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla
 ② rajz

$x=0$
 $x_1=0$

$x+3=0$
 $x_2=-3$

$-3 < x < 0$
 $x \in]-3; 0[$

Az a) és b) feladatok

Mindkét esetben a kifejezés: $x^2 + 2x$.

Először emeljünk ki x -et, hogy megkapjuk a zérushelyeket:

$$x(x + 2) = 0$$

A zérushelyek mindkét esetben:

$$x_1 = 0 \text{ és } x_2 = -2$$

Mivel az x^2 együtthatója pozitív (1), a parabola felfelé nyílik.

a)

$$x^2 + 2x < 0$$

Azt keressük, hol van a parabola az x -tengely alatt.

Ez a két zérushely közötti rész.

Megoldás:

$$-2 < x < 0$$

vagy intervallummal

$$x \in] - 2; 0[$$

b)

$$x^2 + 2x \geq 0$$

Azt keressük, hol van a parabola az x -tengelyen vagy felette.

Ez a két szélső tartomány (beleértve a határokat).

Megoldás:

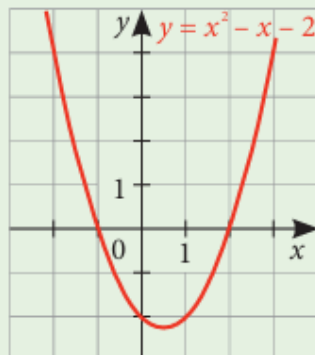
$$x \leq -2 \text{ vagy } x \geq 0$$

vagy intervallummal

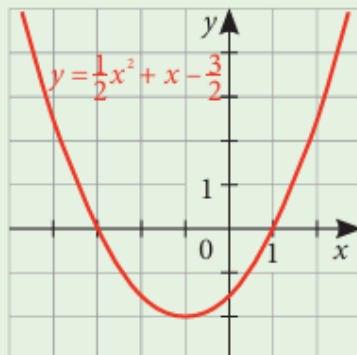
$$x \in] - \infty; -2] \cup [0; \infty[$$

3. A grafikonok segítségével oldd meg a másodfokú egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $x^2 - x - 2 \leq 0$



b) $\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2} \geq 0$



Megoldás:

Ha a kifejezés ≤ 0 vagy < 0 , akkor az x-tengely alatti részt keressük.

Ha a kifejezés ≥ 0 vagy > 0 , akkor az x-tengely feletti részt keressük.

a)

$$x^2 - x - 2 \leq 0$$

Itt azt keressük, hogy a parabola hol van az x-tengelyen vagy alatta (mivel ≤ 0).

Zérushelyek leolvasása:

Nézzük meg, hol metszi a piros görbe a vízszintes x tengelyt.

Látható, hogy a metszéspontok: $x_1 = -1$ és $x_2 = 2$.

Tartomány meghatározása: A grafikon e két pont között fut az x-tengely alatt.

Mivel az egyenlőtlenség megengedi az egyenlőséget ($\leq$), a végpontok is beletartoznak a megoldásba.

Megoldás:

$-1 \leq x \leq 2$; intervallummal: $x \in [-1; 2]$

b)

$$\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2} \geq 0$$

Itt azt keressük, hogy a parabola hol van az x-tengelyen vagy felette (mivel ≥ 0).

Zérushelyek leolvasása:

Nézzük meg a metszéspontokat az x tengelyen.

Látható, hogy a metszéspontok: $x_1 = -3$ és $x_2 = 1$.

Tartomány meghatározása: A görbe a -3 -tól balra eső részen, illetve az 1 -től jobbra eső részen van az x-tengely felett.

Mivel ≥ 0 a feltétel, a -3 és az 1 is a megoldás része.

Megoldás:

$x \leq -3$ vagy $x \geq 1$; intervallummal: $x \in]-\infty; -3] \cup [1; \infty[$

4. A megoldóképlettel határozd meg a következő egyenletek gyökeit a valós számok halmazán!

a) $x^2 + 3x - 4 = 0$

b) $x^2 + 3,8x - 6 = 0$

c) $-x^2 - 1,5x + 1 = 0$

Megoldás:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

a)

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

Itt az együtthatók:

$$a = 1$$

$$b = 3$$

$$c = -4$$

1. Behelyettesítés:

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1}$$

3. Gyökök:

- $x_1 = \frac{-3+5}{2} = \frac{2}{2} = 1$
- $x_2 = \frac{-3-5}{2} = \frac{-8}{2} = -4$

2. Számolás:

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

4. Ellenőrzés:

- **Ha $x = 1$:**
 $1^2 + 3 \cdot 1 - 4 = 1 + 3 - 4 = 0$ (Helyes!)
- **Ha $x = -4$:**
 $(-4)^2 + 3 \cdot (-4) - 4 = 16 - 12 - 4 = 0$ (Helyes!)

b)

$$x^2 + 3,8x - 6 = 0$$

Itt az együtthatók:

$$a = 1$$

$$b = 3,8$$

$$c = -6$$

1. Behelyettesítés:

$$x_{1,2} = \frac{-3,8 \pm \sqrt{3,8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$

3. Gyökök:

- $x_1 = \frac{-3,8+6,2}{2} = \frac{2,4}{2} = 1,2$
- $x_2 = \frac{-3,8-6,2}{2} = \frac{-10}{2} = -5$

2. Számolás:

$$x_{1,2} = \frac{-3,8 \pm \sqrt{14,44 + 24}}{2} = \frac{-3,8 \pm \sqrt{38,44}}{2} = \frac{-3,8 \pm 6,2}{2}$$

4. Ellenőrzés:

Ha $x = 1,2$:
 $1,2^2 + 3,8 \cdot 1,2 - 6 = 1,44 + 4,56 - 6 = 6 - 6 = 0$ (Helyes!)

Ha $x = -5$:
 $(-5)^2 + 3,8 \cdot (-5) - 6 = 25 - 19 - 6 = 25 - 25 = 0$ (Helyes!)

c)

$$-x^2 - 1,5x + 1 = 0$$

Itt az együtthatók:

$$a = -1$$

$$b = -3$$

$$c = 1$$

1. Behelyettesítés:

$$x_{1,2} = \frac{-(-1,5) \pm \sqrt{(-1,5)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 1}}{2 \cdot (-1)}$$

2. Számolás:

$$x_{1,2} = \frac{1,5 \pm \sqrt{2,25 + 4}}{-2} = \frac{1,5 \pm \sqrt{6,25}}{-2} \\ = \frac{1,5 \pm 2,5}{-2}$$

3. Gyökök:

$$\bullet \quad x_1 = \frac{1,5 + 2,5}{-2} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$\bullet \quad x_2 = \frac{1,5 - 2,5}{-2} = \frac{-1}{-2} = 0,5$$

4. Ellenőrzés:

Ha $x = -2$:

$$-(-2)^2 - 1,5 \cdot (-2) + 1 = -(4) + 3 + 1 = -4 + 4 = 0 \text{ (Helyes!)}$$

Ha $x = 0,5$:

$$-(0,5)^2 - 1,5 \cdot 0,5 + 1 = -0,25 - 0,75 + 1 = -1 + 1 = 0 \text{ (Helyes!)}$$

5. Az előző feladat segítségével oldd meg az egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $x^2 + 3x - 4 > 0$

b) $x^2 + 3,8x - 6 \leq 0$

c) $-x^2 - 1,5x + 1 \geq 0$

Megoldás:

a)

- **Zérushelyek:** $x_1 = -4$ és $x_2 = 1$ (a 4/a feladatból).
- **A parabola:** Mivel az x^2 előtt 1 áll (pozitív), a parabola felfelé nyílik.
- **Keresett tartomány:** > 0 , tehát az **x-tengely feletti rész** (szigorú egyenlőtlenség, a zérushelyek nem tartoznak bele).
- **Megoldás:**
 $x < -4$ vagy $x > 1$; intervallummal: $x \in]-\infty; -4 [\cup]1; \infty[$

b)

- **Zérushelyek:** $x_1 = -2$ és $x_2 = 5$ (a 4/c feladatból).
- **A parabola:** Mivel az x^2 előtt -1 áll (negatív), a parabola felfelé nyílik.
- **Keresett tartomány:** ≤ 0 , tehát az **x-tengely alatti rész**, beleértve a zérushelyeket is.
- **Megoldás:**
 $-5 \leq x \leq 1,2$; intervallummal: $x \in [-5; 1,2]$

c)

- **Zérushelyek:** $x_1 = -2$ és $x_2 = 0,5$ (a 4/a feladatból).
- **A parabola:** Mivel az x^2 előtt 1 áll (pozitív), a parabola lefelé nyílik.
- **Keresett tartomány:** ≥ 0 , tehát az **x-tengely feletti rész**, beleértve a zérushelyeket is.
- **Megoldás:**
 $-2 \leq x \leq 0,5$; intervallummal: $x \in [-2; 0,5]$

- 1.** Márton tavaly 70 kg tömegű volt, és 170 cm magas. Idén 5 kg-mal „nehezebb” (nagyobb tömegű), testtömegindexe mégis csökkent a tavalyihoz képest. Hány cm-t nőhetett Márton tavaly óta?

Megoldás

A testtömegindexet úgy számítjuk ki, hogy a testtömeget elosztjuk a méterben mért magasság négyzetével. (Ez akkor „normális”, ha 20 és 25 közé esik.) Az adatok szerint tavaly Márton testtömegindexe $\frac{70}{1,7^2} = 24,2$ volt.

Ha Márton idén x méter magas, akkor a testtömegindexe $\frac{75}{x^2}$. A feladat szerint $\frac{75}{x^2} < 24,2$.

Világos, hogy itt $x > 0$, tehát a pozitív számok halmazán keressük a megoldásokat.

Ezt az egyenlőtlenséget mérlegelv alkalmazásával is alakíthatjuk.

Szorozzuk meg mindkét oldalt x^2 -tel: $75 < 24,2x^2$ (mivel $x > 0$, ezért $x^2 > 0$ is igaz, tehát pozitív számmal szoroztunk), majd osszuk el mindkét oldalt 24,2-del: $3,1 < x^2$.

Egy pozitív szám négyzete pontosan akkor nagyobb 3,1-nél, ha maga a szám nagyobb $\sqrt{3,1}$ -nél, azaz kb. 1,76-nál.

Ez azt jelenti, hogy Márton idén 1,76 méternél magasabb, vagyis több mint 6 cm-t nőtt tavaly óta.

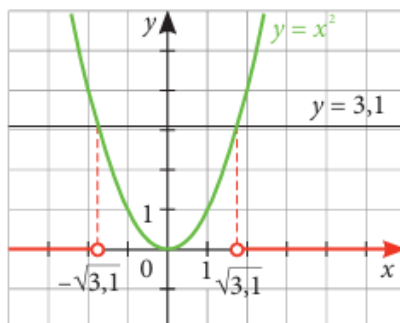
2. Oldjuk meg a valós számok halmazán a $\frac{75}{x^2} < 24,2$ egyenlőtlenséget!

Megoldás

Aki gyorsan azt válaszolja, hogy ugyanaz a megoldása (tehát $x > 1,76$) ennek az egyenlőtlenségnek is, mint az 1. feladatbelinek, az hibázik. Az értelmezési tartományba most a negatív valós számok is beletartoznak, csak a 0 nem.

A mérlegelv most is alkalmazható, hiszen $x^2 > 0$ most is igaz. Mérlegelv alkalmazása után ugyanazt kapjuk, mint előbb: $3,1 < x^2$.

Melyik valós számokra teljesül, hogy négyzetük nagyobb 3,1-nél? Az ábrán jól láthatjuk, hogy ez nemcsak a $\sqrt{3,1}$ -nél nagyobb számokra teljesül, hanem a $(-\sqrt{3,1})$ -nél kisebb számokra is. Az x tengelyen pirossal jelöltük a megfelelő számokat.



Kerekített értékeket használva a megoldáshalmaz:

$$\mathbf{R} \setminus [-1,76; 1,76].$$